Ableitung

$f(x) = x^r$	$f'(x) = r \cdot x^{r-1}$	Potenzregel
$f(x) = r \cdot g(x)$	$f'(x) = r \cdot g'(x)$	Faktorregel
$f(x) = k(x) + h(x)$	$f'(x) = k'(x) + h'(x)$	Summenregel

$f'(x)$ streng monoton wachsend oder $f''(x) > 0$
↳ Linkskurve

$f'(x)$ streng monoton fallend oder $f''(x) < 0$
↳ Rechtskurve

Extremstellen

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) < 0$
↳ f hat an x_0 Maximum

$f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$
↳ f hat an x_0 Minimum

Wendestelle

f hat bei x_0 eine Wendestelle, wenn

$f''(x_0) = 0$ und VZW bei f'' oder

$f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$

Tangentengleichung

$t: y = f'(u) \cdot (x - u) + f(u)$

Normalengleichung

$n: y = -\frac{1}{f'(u)} \cdot (x - u) + f(u)$

Verkettung

$f = u \circ v$ ist Verkettung der Funktionen u und v

$f(x) = u(v(x))$

$f'(x) = u'(v(x)) \cdot v'(x)$

Produktregel

$f(x) = u(x) \cdot v(x)$

$f'(x) = u'(x) \cdot v(x) + u(x) \cdot v'(x)$

Quotientenregel

$$f(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$$

$$f'(x) = \frac{u'(x) \cdot v(x) - u(x) \cdot v'(x)}{v^2(x)}$$

natürliche Exponentialfunktion

$f(x) = e^x$

$f'(x) = e^x$

$e^x = b$

$x = \ln(b)$

Differenzial- & Integralrechnung

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Stammfunktionen (Aufleiten)

$f(x) = x^r \qquad F(x) = \frac{1}{r+1} x^{r+1}$

$f(x) = x^{-1} = \frac{1}{x} \qquad F(x) = \ln(|x|)$

$f(x) = x^{-2} \qquad F(x) = -x^{-1}$

Rechenregeln

$f(x) = g(x) + h(x) \qquad F(x) = G(x) + H(x)$

$f(x) = c \cdot g(x) \qquad F(x) = c \cdot G(x)$

$f(x) = g(c \cdot x + d) \qquad F(x) = \frac{1}{c} \cdot G(c \cdot x + d)$

Integral-Rechenregeln

$$\int_a^b c \cdot f(x)\,dx = c \cdot \int_a^b f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (g(x) + h(x))\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + \int_a^b h(x)\,dx$$

Mittelwert

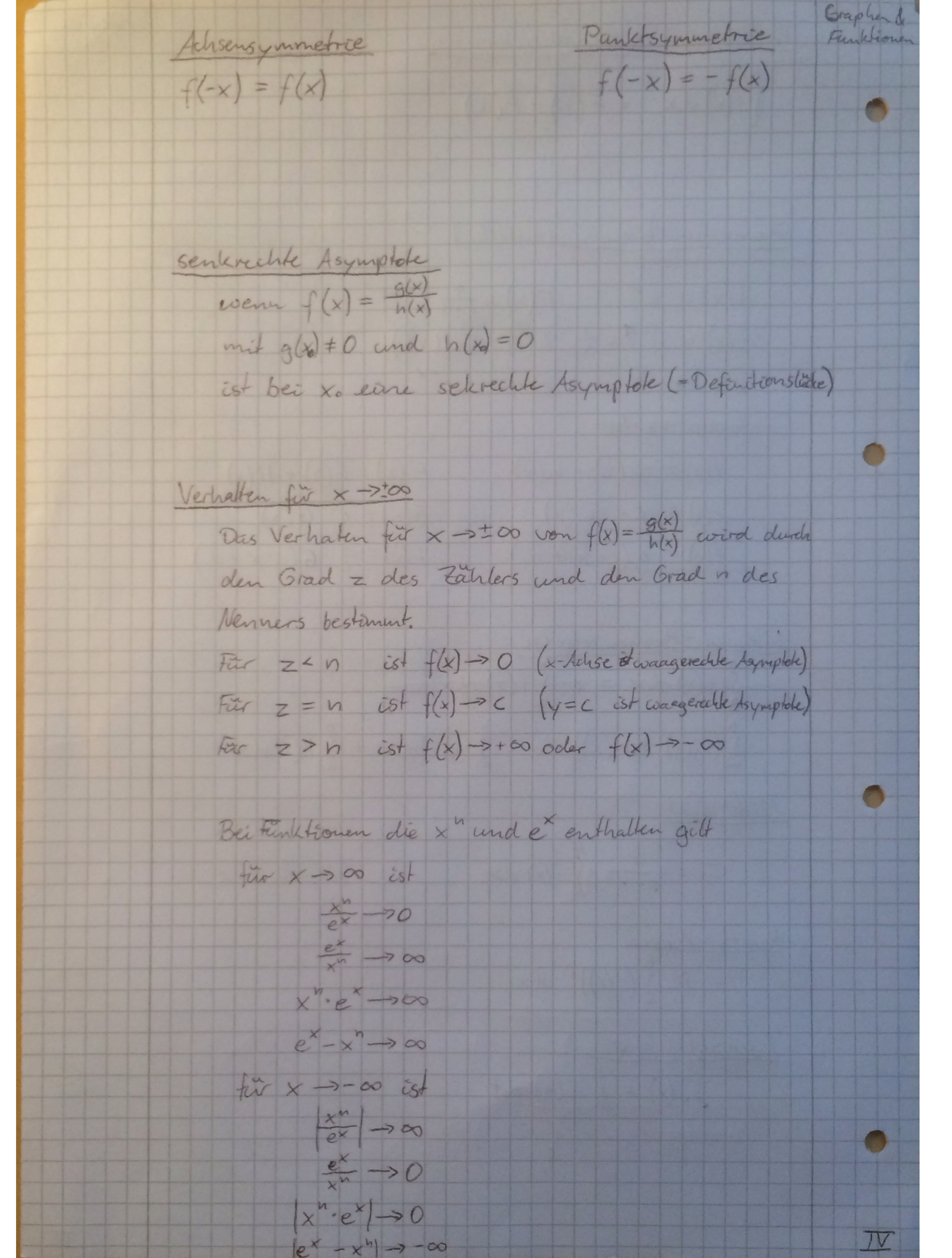
$$\overline{m} = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)\,dx$$

Rotationskörper

$$V = \pi \int_a^b (f(x))^2\,dx$$

Integralfunktion

$$J_u(x) = \int_u^x f(t)\,dt$$



Achsensymmetrie

$f(-x) = f(x)$

Punktsymmetrie

$f(-x) = -f(x)$

senkrechte Asymptote

wenn $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$

mit $g(x_0) \neq 0$ und $h(x_0) = 0$

ist bei x_0 eine sekrechte Asymptote (= Definitionslücke)

Verhalten für $x \to \pm\infty$

Das Verhaten für $x \to \pm\infty$ von $f(x) = \frac{g(x)}{h(x)}$ wird durch den Grad z des Zählers und den Grad n des Nenners bestimmt.

Für $z < n$ ist $f(x) \to 0$ (x-Achse ist waagerechte Asymptote)

Für $z = n$ ist $f(x) \to c$ ($y = c$ ist waagerechte Asymptote)

Für $z > n$ ist $f(x) \to +\infty$ oder $f(x) \to -\infty$

Bei Funktionen die x^n und e^x enthalten gilt

für $x \to \infty$ ist

$$\frac{x^n}{e^x} \to 0$$

$$\frac{e^x}{x^n} \to \infty$$

$$x^n \cdot e^x \to \infty$$

$$e^x - x^n \to \infty$$

für $x \to -\infty$ ist

$$\left|\frac{x^n}{e^x}\right| \to \infty$$

$$\frac{e^x}{x^n} \to 0$$

$$|x^n \cdot e^x| \to 0$$

$$|e^x - x^n| \to -\infty$$

$f(x) = a \cdot \sin(b(x-c)) + d$

- Periode: $p = \frac{2\pi}{b}$
- Amplitude: $|a|$
- Verschiebung: um c in x-Richtung und d in y-Richtung.

Ortskurve

z.B. alle Hochpunkte einer Funktionenschar f_t auf Kurve.

Bestimmung von P_t als Punkt auf Funktion. Dann aus Darstellung der x-y-Koordinaten den Parameter t eliminieren

Folgen Allgemeines:

- rekursive vs. explizite Darstellung
- monoton wachsend $(a(n+1) \geq a(n))$
  monoton fallend $(a(n+1) \leq a(n))$
- nach oben oder unten Beschränkt durch Schranke S
- Grenzwert g: $a(n) \rightarrow g$

Exponentielles Wachstum

mit Wachstumsfaktor a

$B(n) = B(0) \cdot a^n$ $\quad$ $f(x) = f(0) \cdot a^x$

$B(n) = B(0) \cdot e^{k \cdot n}$ $\quad$ $f(x) = f(0) \cdot e^{k \cdot x}$

$f'(x) = k \cdot f(x)$

Beschränktes Wachstum

mit Schranke S

$B(n) = S - c \cdot a^n$ $\quad$ $f(x) = S - c \cdot a^x$

$B(n) = S - c \cdot e^{-kn}$ $\quad$ $f(x) = S - c \cdot e^{k \cdot x}$

$f'(x) = k \cdot (S - f(x))$

Gauß-Verfahren

1. LGS in Stufenform durch umformen
2. Schrittweise auflösen

Lösungen

Eine, keine oder unendlich viele

Vektoren

Gerade

Parametergleichung

$$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u}$$

Stützvektor $\vec{p}$ und Richtungsvektor $\vec{u}$

Länge von Vektoren

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \text{ für } \vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a_0} = \frac{1}{|\vec{a}|} \cdot \vec{a} \qquad |\vec{a_0}| = 1$$

Ebene

Parametergleichung

$$\vec{x} = \vec{p} + r \cdot \vec{u} + s \cdot \vec{v}$$

$\vec{n} \cdot \vec{u} = \vec{n} \cdot \vec{v} = 0$

Normalengleichung

$$(\vec{x} - \vec{p}) \cdot \vec{n} = 0$$

ausmultiplizieren

$\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

Koordinatengleichung

$$a x_1 + b x_2 + c x_3 = d$$

Gegenseitige Lage von Ebenen & Geraden

$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix}$

$E: a x_1 + b x_2 + c x_3 = d$

$\Leftrightarrow a(p_1 + r \cdot v_1) + b(p_2 + r \cdot v_2) + c(p_3 + r \cdot v_3) = d$

Bei einer Lösung → Schneiden

Keine Lösung → Parallel

Unendlich Lösungen → ~~[illegible]~~ g liegt in E

Gegenseitige Lage von Ebenen

in Parametergleichungen

1. Gleichsetzen
2. LGS Lösen

in Koordinatenform

1. LGS aufstellen & lösen

Ebenen sind entweder parallel, identisch oder haben Schnittgerade.

Abstand Punkt - Ebene

Punkt: $R(r_1|r_2|r_3)$ und Ebene: E

$$d = |(\vec{r} - \vec{p}) \cdot \vec{n_0}|$$

$$d = \left| \frac{a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 - b}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} \right|$$

Abstand Punkt - Gerade

$$g: \vec{x} = \vec{p} + t \cdot \vec{u}$$

$$R(r_1|r_2|r_3)$$

1. Es ist $\overrightarrow{P_t R} \cdot \vec{u} = 0$
2. Nach t auflösen
3. Abstand $d = |\overrightarrow{P_t R}|$

Abstand windschiefer Geraden

Geraden $g: \vec{x} = \vec{p} + s \cdot \vec{u}$

$h: \vec{x} = \vec{q} + t \cdot \vec{v}$

G und H sind Punkte von g und h.

Wenn $\overrightarrow{GH} \cdot \vec{u} = 0$

$\overrightarrow{GH} \cdot \vec{v} = 0$

ist $|\overrightarrow{GH}|$ der Abstand von g zu h

Winkel zwischen Vektoren

$$\cos(\alpha) = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|}$$

Schnittwinkel

Gerade - Gerade

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{v}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}$$

$\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind die Richtungsvektoren

Ebene - Ebene

$$\cos(\alpha) = \frac{|\vec{n_1} \cdot \vec{n_2}|}{|\vec{n_1}| \cdot |\vec{n_2}|}$$

$\vec{n_1}$ und $\vec{n_2}$ sind die Normalenvektoren

Gerade - Ebene

$$\sin(\alpha) = \frac{|\vec{u} \cdot \vec{n}|}{|\vec{u}| \cdot |\vec{n}|}$$

$\vec{u}$ ist Richtungsvektor, $\vec{n}$ ist Normalenvektor

Spiegelung

Punkt

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OZ} + \overrightarrow{PZ}$$

mit Punkt P, Bildpunkt P' und Zentrum Z

Gerade/Ebene

$$\overrightarrow{OP'} = \overrightarrow{OF} + \overrightarrow{PF}$$

mit Punkt P, Bildpunkt P' und Lotfußpunkt F von P auf g/E

Bernoulli-Versuch (genau 2 Ausgänge)

Bernoulli-Formel: $P(X=r) = B_{n;p}(r) = \binom{n}{r} \cdot p^{r} \cdot (1-p)^{n-r}$

Länge n; Trefferwahrscheinlichkeit p; Anzahl Treffer r

Erwartungswert $\mu = n \cdot p$

mit TR:

$P(X=r)$: binompdf(n, p, r)

$P(X \leq r)$: binomcdf(n, p, r)

Standardabweichung

$\sigma = \sqrt{n \cdot p \cdot (1-p)}$

Sigma-Regeln:

$P(\mu - \sigma \leq X \leq \mu + \sigma) \approx 68{,}3\,\%$

$P(\mu - 2\sigma \leq X \leq \mu + 2\sigma) \approx 95{,}4\,\%$

$P(\mu - 3\sigma \leq X \leq \mu + 3\sigma) \approx 99{,}7\,\%$

Signifikanztest

Zweiseitig

1. Nullhypothese $H_0: p = p_0$; Alternative $H_1: p \neq p_0$
2. Festlegen Stichprobenumfang n & Signifikanzniveau α (z.B. 5%)
3. binomcdf(n, p_0, x) in Tabelle
4. Suche für x die kleinsten Zahlen a und b, sodass

   $P(X \leq a) > 2{,}5\,\%$ ($\frac{\alpha}{2}$) und $P(X \leq b) > 97{,}5\,\%$ ($1-\frac{\alpha}{2}$) $\rightarrow [a; b]$

Linksseitig

1. Nullhypothese $H_0: p = p_0$; Alternative $H_1: p < p_0$
2. & 3. wie oben
4. Suche kleinstes a, dass $P(X \leq a) > 5\,\%$ (α) $\rightarrow [a; n]$

Rechtsseitig

1. Nullhypothese $H_0: p = p_0$; Alternative $H_1: p > p_0$

2. & 3. oben

4. Suche kleinstes b, dass $P(X \leq b) > 95\,\%$ $\rightarrow [0; b]$